令和４年　東京都公立高校入学試験「数学」の略解と解説

一昨日　冗　著

注意：　答えは，赤文字 or 赤数字で示す。問題の解き方はいっぱいあるので，私の解法に固執する必要はありません。答えに行き着けばいいのです。

1　次の各問に答えよ。

［問１］ $1-6^2 \div \dfrac{9}{2}$ を計算せよ。

解答）与式 $= 1-36\times\dfrac{2}{9} = 1-4\times 2 = -7$

［問２］ $\dfrac{3a+b}{4} - \dfrac{a-7b}{8}$ を計算せよ。

解答）与式 $= \dfrac{6a+2b-a+7b}{8} = \dfrac{5a+9b}{8}$

［問３］ $(2+\sqrt{6})^2$ を計算せよ。

解答）与式 $= 4+4\sqrt{6}+6 = 10+4\sqrt{6}$

［問４］ 一次方程式　$5x-7=9(x-3)$　を解け。

解答）$5x-9x=7-27,\quad -4x=-20,\quad \therefore\ x=5$

［問５］ 連立方程式　$\begin{cases} x=4y+1 \\ 2x-5y=8 \end{cases}$　を解け。

解答）第１式を第２式に代入すると（代入法），

$$2(4y+1)-5y=8,\quad 8y+2-5y=8,\quad 3y=6,\quad \therefore\ y=2$$

この y の値を第１式に代入して，$x=8+1=9$. 答えは　$x=9,\ y=2$.

［問６］ 二次方程式　$4x^2+6x-1=0$　を解け。

解答）x の項の係数が２の倍数になっている二次方程式　$ax^2+2bx+c=0$　の解の公式は

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$　だから，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+4}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{4}$.

解説）ここまでの６問は，教科書のややややさしい例題程度なので，全員正解できたと思います。全部レベル４ですね。問６の公式は，覚えて使えるようにして下さい。

［問７］次の $\boxed{}$ に当てはまる数字 (1 桁) を答えよ。

右の表は，ある中学校の生徒 33 人が，的に向けてボールを 10 回ずつ投げたとき，的に当たった回数ごとの人数を整理したものである。

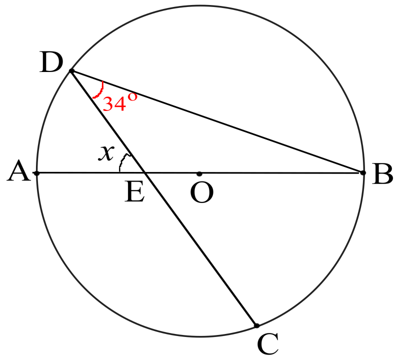
ボールが的に当たった回数の中央値は $\boxed{}$ 回である。

解答）データの大きさ (人数) は 33 なので，中央値はまん中の 17 番目のデータです。表の右に累積度数を緑の数字で書いておきました。これを見ると，17 番目は４回の所なので，中央値は４回である。

回数（回）	人数（人）	
0	2	
1	3	5
2	5	10
3	6	16
4	4	20
5	2	
6	2	
7	1	
8	2	
9	4	
10	2	
計	33	

［問８］ 次の$\boxed{}$に当てはまる数字 (2 桁) を答えよ。

図1



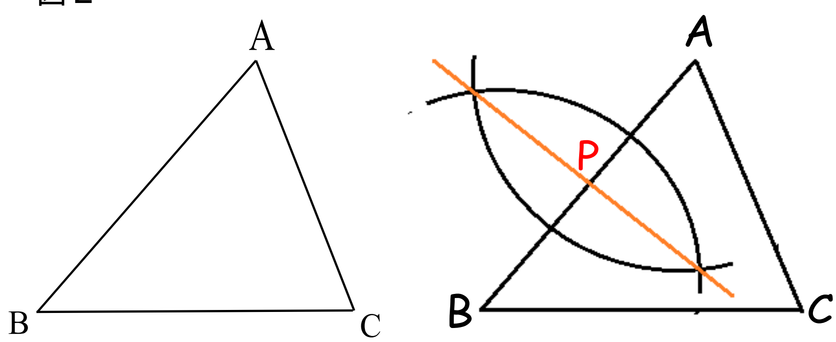
上の図 1 で点 O は線分 AB を直径とする円の中心であり，2 点 C,D は円 O の周上にある点である。4 点 A,B,C,D は図 1 のように A,C,B,D の順に並んでおり，互いに一致しない。

点 B と点 D, 点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。線分 AB と線分 CD との交点を E とする。点 A を含まない $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ について，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 2\,\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$, $\angle\mathrm{BDC} = 34^{\circ}$ のとき，x で示した $\angle\mathrm{AED}$ の大きさは$\boxed{}$度である。

解答）さて，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 2\,\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ だから，弧の長さと円周角との関係から，$\angle\mathrm{ABD} = 17^{\circ}$ がわかる。三角形 EBD の外角の和の公式から $x = 34 + 17 = 51$ (度) がわかる。

［問９］ 下の図 2（左の図）で，△ABC は鋭角三角形である。

図２



解答欄に示した図をもとにして，辺 AB 上にあり，△ACP の面積と △BCP の面積が等しくなるような点 P を，定規とコンパスを用いて作図によって求め，点 P の位置を示す文字 P もかけ。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

解答）答えは，上の右図です。点 A を中心に半径 R の円弧を描き（線分 AB の B の方に近い所で線分 AB に交わるようにする），次に同じ半径 R の円弧を点 B を中心にして描き，2 つの円弧が交わった 2 点を直線で結ぶ（図の赤い線)。この赤い直線と線分 AB の交点が求める点 P である。授業で何回か練習した方法だと思いますので，やさしかったでしょう。

解説）問 7 は，中央値の定義がわかっていれば難しくないですね。データの数が奇数個 n のときは，大きさの順に並べたデータの $\dfrac{n+1}{2}$ 番目が中央値です。データの数が偶数個 n のときは，大きさの順に並べたデータの $\dfrac{n}{2}$ 番目と $\dfrac{n}{2}+1$ 番目の平均値（たして 2 で割った値）が中央値です。難易度はレベル３ですね。問 8 と問 9 は，教科書の例題程度なので，これらもレベル３ですね。

2 Sさんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。次の各問に答えよ。

−−［先生が示した問題］−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

2桁の自然数Pについて，Pの一の位から十の位の数をひいた値をQとし，P−Qの値を考える。

例えば，P$=59$ のとき，Q$=9-5=4$ となり，P−Q$=59-4=55$ となる。

P$=78$ のときのP−Qの値から，P$=41$ のときのP−Qの値をひいた差を求めなさい。

−−

［問１］次の $\boxed{}$ に当てはまる数字 (2桁) を答えよ。

［先生が示した問題］で，P$=78$ のときのP−Qの値から，P$=41$ のときのP−Qの値をひいた差は，$\boxed{}$ である。

解答）P$=78$ のとき，Q$=8-7=1$, P−Q$=78-1=77$.　P$=41$ のとき，Q$=1-4=-3$, P−Q$=41-(-3)=44$. だから，答えは，$77-44=33$.

Sさんのグループは,［先生が示した問題］をもとにして，次の問題を考えた。

−−［Sさんのグループが作った問題］−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

3桁の自然数Xについて，Xの一の位の数から十の位の数をひき，百の位の数をたした値をYとし，X−Yの値を考える。

例えば，X$=129$ のとき，Y$=9-2+1=8$ となり，X−Y$=129-8=121$ となる。

また，X$=284$ のとき，Y$=4-8+2=-2$ となり，X−Y$=284-(-2)=286$ となる。
どちらの場合もX−Yの値は11の倍数となる。

3桁の自然数Xについて，X−Yの値が11の倍数となることを確かめて見よう。

−−

［問２］［Sさんのグループが作った問題］で，3桁の自然数Xの百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c とし，X,Yをそれぞれ a, b, c を用いた式で表し，X−Yの値が11の倍数となることを証明せよ。

証明）自然数X,Yは

$$\mathrm{X}=abc=100a+10b+c, \quad \mathrm{Y}=c-b+a$$

と表せるので，　$\mathrm{X}-\mathrm{Y}=100a+10b+c-(a-b+c)=99a+11b=11(9a+b)$.
したがって，X−Yは11の倍数である。　(Q.E.D)

解説）ここの問題は，文章をすばやく読んで正確に理解することができるかということですね。数学的には難しくはないですね。問1はレベル３，問2はレベル2.5でしょう。

3 下の図 1 (左図) で，点 O は原点，曲線 ℓ は関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフを表している。点 A は曲線 ℓ 上にあり，x 座標は -8 である。

曲線 ℓ 上にあり，x 座標が -8 より大きい数である点を P とする。次の問に答えよ。

［問１］ 次の $\boxed{\quad}$ に当てはまる数を，解答欄から選び（8 つの選択肢あり），記号で答えよ。

点 P の x 座標を a，y 座標を b とする。a のとる値の範囲が $-4 \leqq a \leqq 1$ のとき，b のとる値の範囲は $\boxed{\quad} \leqq b \leqq \boxed{\quad}$ である。

図 1

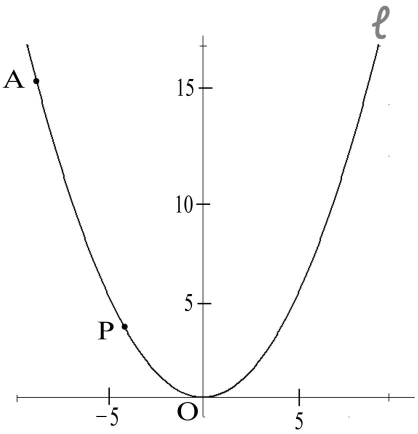
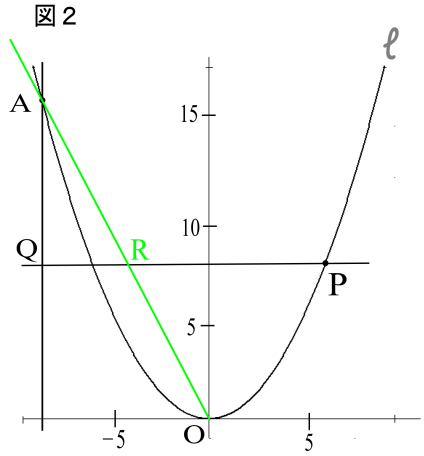


図 2



解答）点 P は，点 $(-4,\,4)$ から曲線 ℓ 上を原点までさがり，そこから点 $(1,\,\frac{1}{4})$ まで増加するので，b のとる値の範囲は $0 \leqq b \leqq 4$ である。

［問２］ 次の $\boxed{\quad}$ に当てはまる数を，解答欄から選び（8 つの選択肢あり），記号で答えよ。

点 P の x 座標が 2 のとき，2 点 A,P を通る直線の式は，$y=\boxed{\quad}x+\boxed{\quad}$ である。

解答）$\mathrm{A}(-8, 16)$，$\mathrm{P}(2,\,1)$ だから，直線の傾きは $-\dfrac{15}{10}=-\dfrac{3}{2}$ である。直線の式は

$$y=-\frac{3}{2}(x-2)+1=-\frac{3}{2}x+4$$ である。

［問３］ 上の図 2 は，図 1 において，点 P の x 座標が 0 より大きく 8 より小さいとき，点 A を通り y 軸に平行な直線と，点 P を通り x 軸に平行な直線との交点を Q とした場合を表している。

点 A と点 O を結んだ線分 AO と直線 PQ との交点を R とした場合を考える。

PR : RQ= 3 : 1 となるとき，点 P の x 座標を求めよ。

解答）点 P の x 座標を a とすると，P の座標は $\left(a,\ \dfrac{1}{4}a^2\right)$．点 R の x 座標は

$$-2x=\frac{1}{4}a^2 \quad より \quad x=-\frac{1}{8}a^2.\quad したがって R の座標は \quad \left(-\frac{1}{8}a^2,\ \frac{1}{4}a^2\right).$$

$$\mathrm{PR}=a-\left(-\frac{1}{8}a^2\right)=a+\frac{1}{8}a^2,\qquad \mathrm{RQ}=-\frac{1}{8}a^2-(-8)=8-\frac{1}{8}a^2 \quad だから，$$

$$\left(a+\frac{1}{8}a^2\right):\left(8-\frac{1}{8}a^2\right)=3:1$$ より，$a>0$ を考慮して計算すると

$$a+\frac{1}{8}a^2=3\left(8-\frac{1}{8}a^2\right) \quad\to\quad a^2+2a-48=0 \quad\to\quad (a+8)(a-6)=0 \quad \therefore\quad a=6.$$

解説）問題文が少し冗長だね（前問も同様），もっと簡潔に書いてほしいね。2 次関数と直線，および長さに関する問題で，ごく普通の問題なので，答えやすかったでしょう。問 1 はレベル 4，問 2 はレベル 3，問 3 はちょっと計算がありますが，レベル 2.5 でしょうか。

4 下の図１で，△ABC と △ABD は，ともに同じ平面上にある正三角形で，頂点 C と頂点 D は一致しない。

点 P は，辺 BD 上にある点で，頂点 B，頂点 D のいずれにも一致しない。点 Q は，辺 BC 上にある点で，頂点 B, 頂点 C のいずれにも一致しない。

頂点 A と点 P，頂点 A と点 Q をそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。

［問１］ 図１において，$\angle$PAQ$=90^{\circ}$，$\angle$DAP$=a^{\circ}$ とするとき，$\angle$AQB の大きさを表す式を次のア〜エのうちから選び，記号で答えよ。（選択肢４つから選ぶ）

解答）四角形 APBQ を考える。$\angle$AQB$=x$ とおくと，内角の和は 360° なので，

$90+(a+60)+120+x=360$ から， $x=90-a$ (度) を得る。

（図の中の，黒以外のカラーの文字や線・点などは，著者がかきいれたものです）

図１

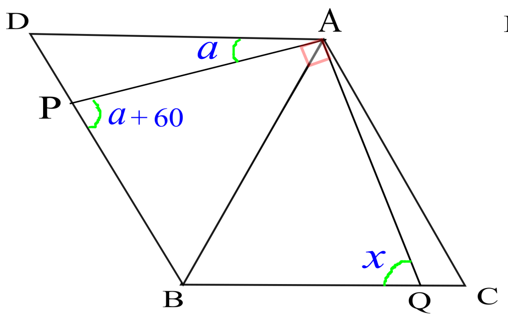
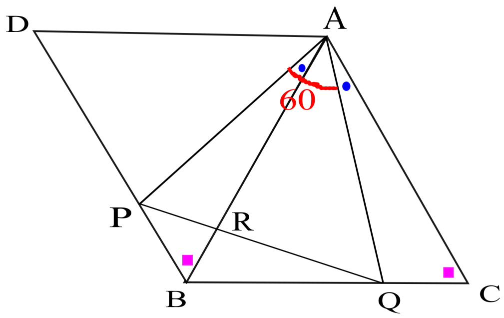


図２



［問２］ 図２は，図１において，$\angle$PAQ$=60^{\circ}$ のとき，点 P と点 Q を結び，線分 AB と線分 PQ との交点を R とした場合を表している。次の ［①］，［②］ に答えよ。

［①］ △ABP≡△ACQ であることを証明せよ。

証明）△ABP と △ACQ において，

$\angle$PAB$=60^{\circ}-\angle$BAQ ⋯ ③ $\angle$QAC$=60^{\circ}-\angle$BAQ ⋯ ④

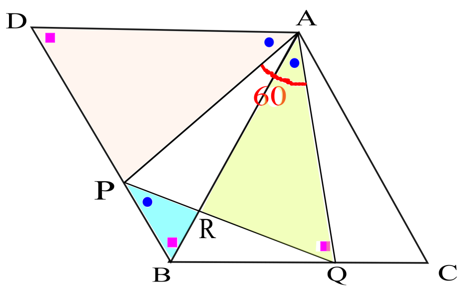
③, ④ より， $\angle$PAB$=\angle$QAC ⋯ ⑤

また， $\angle$ABP$=\angle$ACQ$=60^{\circ}$， ⋯ ⑥ かつ AB=AC. ⋯ ⑦

⑤, ⑥, ⑦ より，一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので △ABP≡△ACQ. (Q.E.D)

［②］ 次の $\boxed{}$ に当てはまる数字を答えよ。

図２において，DP : PB= 2 : 1 のとき，△BRP の面積は，△ABC の面積の $\boxed{}$ 倍である。



問2，②

解答）正三角形 ABC の一辺は長さ 2 であるとして，面積などを計算する。DP$=\dfrac{4}{3}$，PB $=\dfrac{2}{3}$ に注意すること。

まず，△ABC の

面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}.$ ⋯ ①

さて，右図の色をつけた 3 つの三角形は相似であることがわかります（詳細は書きません，同じ大きさの角度には，同じ色をつけたので，図でわかるかな）。即ち；

$\triangle$ADP $\backsim$ $\triangle$AQR $\backsim$ $\triangle$PBR. $\cdots$ ②

AP の長さは $\sqrt{(1/3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{28/9} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$ だから，②より

$$\mathrm{AD}:\mathrm{AQ}:\mathrm{PB} = 2 : \frac{2}{3}\sqrt{7} : \frac{2}{3} = 3 : \sqrt{7} : 1 \quad \cdots \text{③}$$

すなわち（③より），$\triangle$ADP と $\triangle$PBR の相似比は 3 : 1 である。

$\triangle$ADP の面積は $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ なので，

$\triangle$PBR の面積は $\frac{2}{3}\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27}\sqrt{3}.$

① より，$\triangle$ABC の面積は $\sqrt{3}$ なので，$\triangle$BRP の面積は，$\triangle$ABC の面積の $\frac{2}{27}$ 倍である。

解説）私が図中に書き入れた角の大きさや，同じ大きさの角の印（青丸など），相似三角形の識別，などが試験中に正確に図の中に記入できれば，ほぼ正解に近づいたと言えるでしょう。しかし，最後の問 2 の［②］は難しいね。色をつけた 3 つの三角形の相似には，なかなか気が付かないよね。これは，できなくてもしょーがないね。

正三角形の底辺の長さが 2 のとき，高さが $\sqrt{3}$ になるのは，よく使いますね（覚えておいた方がいいね）。問 1 はレベル 3，問 2 の［①］は，教科書の例題程度の証明問題なのでレベル 2.5，［②］はレベル 1 ですね。

5 下の図 1 に示した立体 ABCD-EFGH は，AB=AD=8cm，AE=7cm の直方体である。

点 M，点 N はそれぞれ辺 EF，辺 EH の中点である。

点 P は，頂点 A を出発し，辺 AB，辺 BC 上を毎秒 1cm の速さで動き，16 秒後に頂点 C に到着する。

点 Q は，点 P が頂点 A を出発するのと同時に頂点 A を出発し，辺 AD，辺 DC 上を毎秒 1cm の速さで動き，16 秒後に頂点 C に到着する。

点 M と点 N，点 M と点 P，点 N と点 Q，点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。

［問 1］ 次の $\boxed{\quad}$ に当てはまる数字を答えよ。

点 P が頂点 A を出発してから 3 秒後のとき，四角形 MPQN の周の長さは，$\boxed{\quad}$ cm である。

図 1

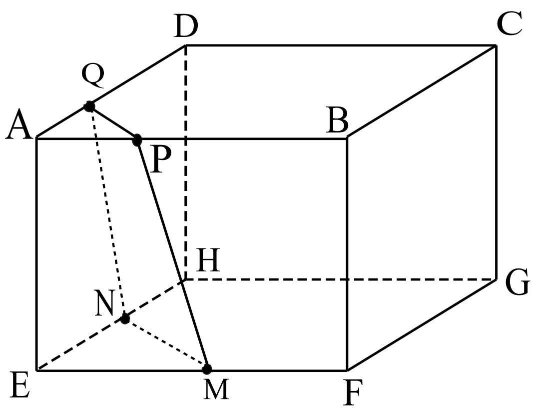
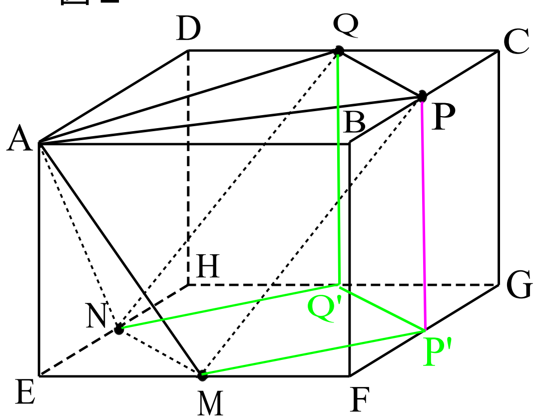


図 2



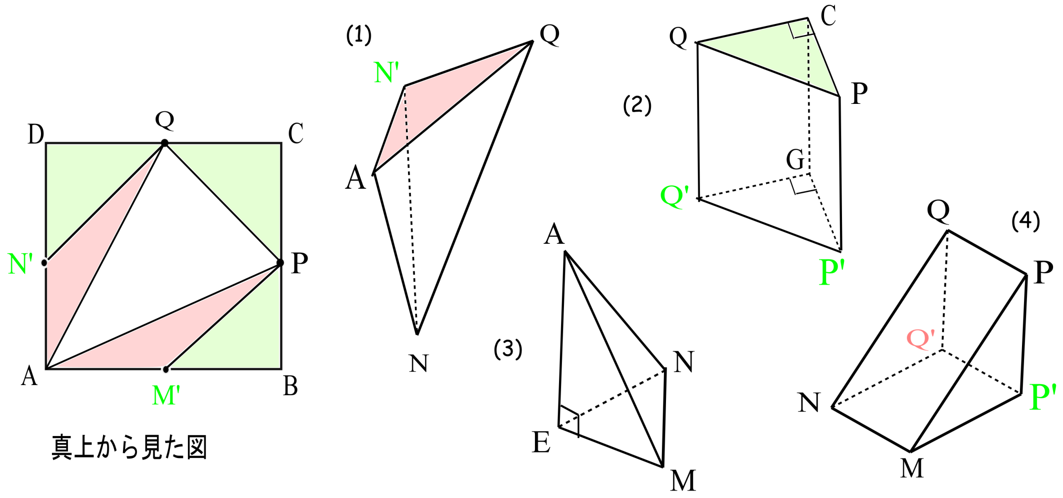
解答）四角形の各辺の長さを求めよう（単位は略す）。

PQ= $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$, QN = $\sqrt{1+7^2}=5\sqrt{2}$ =PM, MN= $4\sqrt{2}$ だから，全長は
$3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+10\sqrt{2}=17\sqrt{2}$ (cm).

［問２］ 次の $\boxed{}$ に当てはまる数字を答えよ。

上の右の図２は，図１において，点 P が頂点 A を出発してから 12 秒後のとき，頂点 A と点 M，頂点 A と点 N，頂点 A と点 P，頂点 A と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。このとき，立体 A-MPQN の体積は，$\boxed{}$ cm^3 である。

解答）点 P と Q は，それぞれがのっている辺の中点だから，四角形 MPQN は長方形で，題意の立体は四角錐である。この四角錐は，底面の長方形 MPQN に対して，その高さがわからないので，簡単に計算できない。



求める四角錐を除いた，他の部分の立体の体積を求めよう（単位は略)。立体を真上から見た図と，求める四角錐を除いた，他の部分の立体を図に描いた。点 M ’ と N ’ は，それぞれ辺 AB と AD の中点である。(1) の三角錐 N-AQN ’ と三角錐 M-APM ’ は同じ大きさで体積は，
$\dfrac{1}{3}\cdot 8\cdot 7=\dfrac{56}{3}$. (2) の三角柱の体積は $8\times 7=56$. これと同じ大きさの三角柱は頂点 B を含むものと頂点 D を含むものがある（底面がうす緑色のもの，全部で３つ)。(3) の三角錐の体積は
$\dfrac{1}{3}\cdot 8\cdot 7=\dfrac{56}{3}$. (4) の四角柱を半分にした立体の体積は $\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 7=112$.
したがって，立体 A-MPQN の体積は，

$$448-2\times\frac{56}{3}-3\times 56-\frac{56}{3}-112=448-336=112\ (\text{cm}^3).$$

解説）［問１］は，三平方の定理で各辺の長さが計算できます。教科書の例題程度なので，レベル 2.5 でしょうね。［問２］は難しいね。直方体から，求める四角錐を取り除いた立体をばらばらにして計算しなければならないのですが，これらの一つ一つを正確にイメージするのは至難の業です。私もすぐにはできませんでした。結局，模型を作って，計算したよ。まあ，ほとんどの受験生はできなかったでしょう。難しすぎるよ。レベル１だね。しかしながら，答えはもとの直方体の４分の１なので，正しく計算できなくても（あてずっぽうで）答えがあう確率は高いね。と言うことで，あまりいい問題じゃないね。

総括）東京都の問題は初めて解答してみましたが，この問題は易しすぎたのではないでしょうか。神奈川県の問題よりだいぶ易しいですね。と言うのは，やや難しい問題（教科書の例題や問で１

番難しいくらいの問題）がほとんどなかったのです。けっこう易しい問題と極端に難しい問題（ただし２つ）しかなかったという，私の感想です。難易度にレベルをつけましたので，レベルごとの配点を表にしてみました。

表１． 難易度別の配点

レベル	$\boxed{1}$ 計算・中央値・図形	$\boxed{2}$ 整数・倍数	$\boxed{3}$ 2 次関数・比例式	$\boxed{4}$ 三角形・合同・面積	$\boxed{5}$ 空間図形・体積
4	30		5		
3	16	5	5	5	
2.5		7	5	7	5
2					
1				5	5
合計	46	12	15	17	10

このような配点になったので，　レベル 3 までできると　66 点，
レベル 2.5 までできると　90 点
となります。90 点とれた受験生は多かったことでしょう。

レベル 4 とレベル 3 の問題は減らして，レベル 2 やレベル 1.5 の問題を増やした方がいいですね。来年度の問題に期待します。

（2022 年，6 月 16 日　完，おとといのジョー）